Trigonometrie

Arno Schneider

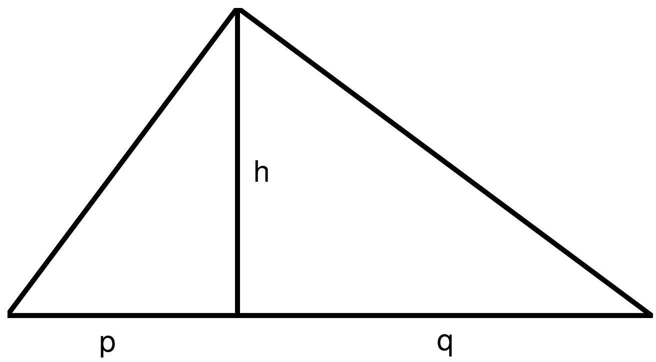
September 2011

1 Aufgabe 1

Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt $6 \cdot \sqrt{5}$. Von den Hypotenusenabschnitten weiß man, dass der eine um 8 Längeneinheiten (LE) größer als der andere ist.
Berechne die Länge der Hypotenuse!

1.1 Lösung zu Aufgabe 1

Die Lösung dieser Aufgabe funktioniert am einfachsten über den sog. Höhensatz des Euklid. Dieser lautet $h^2 = p \cdot q$. Eine Skizze ist hilfreich zur besseren Orientierung.



Die Höhe h ist in der Aufgabe gegeben, nämlich $6 \cdot \sqrt{5}$. Nun muss man versuchen die beiden Unbekannten in der Gleichung so umzustellen dass am Ende nur noch eine Unbekannte übrig bleibt, um die Gleichung lösen zu können.

Orientiert man sich an der Skizze, so ist in diesem Fall q länger als p und dies exakt um 8 LE, wie aus der Aufgabe hervorgeht. Demnach lautet die Formel für q:

$$q = p + 8$$

Nun nimmt man die gesamte Formel des Höhensatzes und ersetzt darin q durch den Term (p + 8). Dies ergibt dann folgende Fomel mit der dann weiter gerechnet wird:

$$h^2 = p \cdot (p + 8)$$

Jetzt setzt man den bekannten Wert für die Höhe h ein und löst die Klammer auf, danach rechnet man das Höhenquadrat:

$$(6 \cdot \sqrt{5})^2 = p^2 + 8p$$

$$180 = p^2 + 8p$$

Nun bringt man mittels Äquivalenzumformung eine Seite auf Null und erhält so eine waschecht quadratische Gleichung:

$$180 = p^2 + 8p \qquad \Big| -180$$

$$0 = p^2 + 8p - 180$$

Jetzt ersetzt man p durch x und bildet zum Lösen der quadratischen Gleichung die sog. pq-Formel ein:

$$0 = x^2 + 8x - 180$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1/2} = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + 180}$$

$$x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16 + 180}$$

$$x_{1/2} = -4 \pm \sqrt{196}$$

$$x_{1/2} = -4 \pm 14$$

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = \cancel{-18}$$

Der Wert für x_2 ist in diesem Fall unsinnig da das Dreieck keinen Hypotenusenabschnitt mit negativer Länge haben kann.